Números complejos o imaginarios

Unidad imaginaria

Se llama así al número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra ***i*.**

$\sqrt{-1} = i$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$

Números imaginarios

Un **número imaginario** se denota por **b*i***, donde :

b es un número real

i es la unidad imaginaria

Con los **números imaginarios** podemos calcular raíces con índice par y radicando negativo.

$x^2 + 9 = 0$

$$x^2 = -9 \qquad x = \pm\sqrt{-9} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3i \\ \searrow x_2 = -3i \end{array}$$

Potencias de la unidad imaginaria

$\boldsymbol{i^0 = 1}$

$\boldsymbol{i^1 = i}$

$\boldsymbol{i^2 = -1}$

$\boldsymbol{i^3 = -i}$

$\boldsymbol{i^4 = 1}$

Los valores **se repiten de cuatro en cuatro**, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

i^{22}

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$i^{22} = (i^4)^5 \cdot i^2 = -1$

$i^{27} = -i$

Números complejos en forma binómica

Al número $a + bi$ le llamamos **número complejo** en **forma binómica**.

El número **a** se llama **parte real** del **número complejo**.

El número **b** se llama **parte imaginaria** del **número complejo**.

Si $b = 0$ el **número complejo** se reduce a un **número real** ya que $a + 0i = a$.

Si **a = 0** el **número complejo** se reduce a ***bi***, y se dice que es un **número imaginario puro**.

El conjunto de todos **números complejos** se designa por $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Los **números complejos a + b*i*** y **−a − b*i*** se llaman **opuestos**.

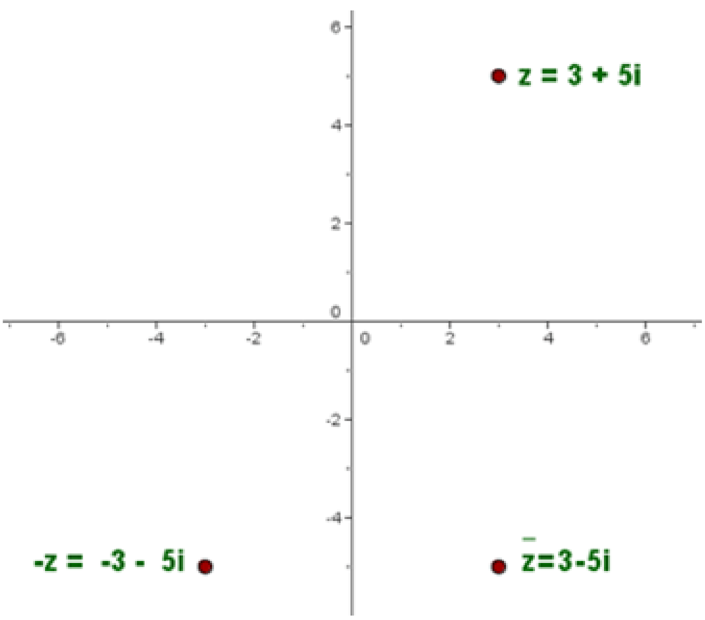
Los **números complejos z = a + b*i*** y **z = a − b*i*** se llaman **conjugados**.

Dos **números complejos** son **iguales** cuando tienen **la misma componente real y la misma componente imaginaria.**

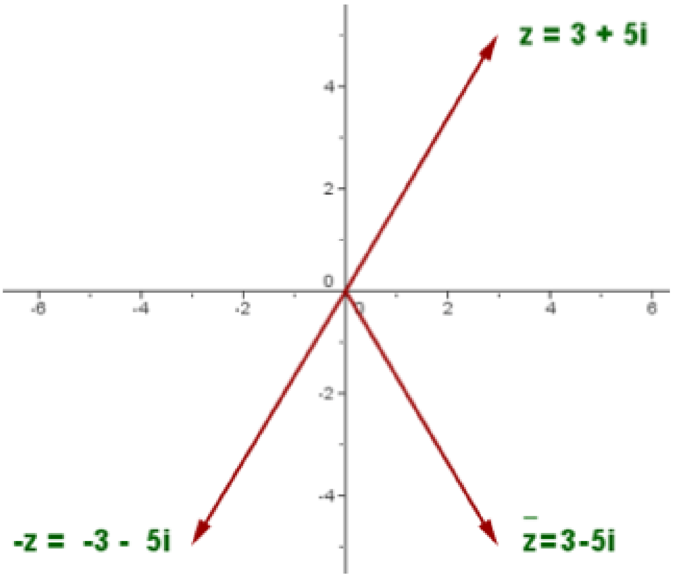
Representación gráfica de números complejos

Los **números complejos** se representan en unos ejes cartesianos. El **eje X** se llama **eje real** y el **Y**, **eje imaginario**. **El número complejo a + b*i*** se representa:

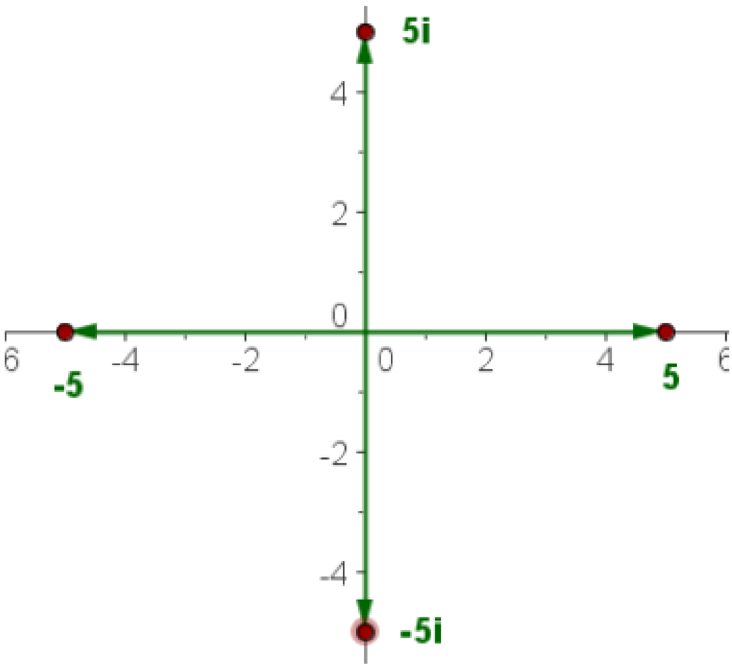
1 Por el punto **(a,b)**, que se llama su **afijo** ,



2 Mediante un **vector de origen (0, 0) y extremo (a, b).**



Los afijos de los **números reales** se sitúan sobre el eje real, **X**. Y **los imaginarios** sobre el eje imaginario, **Y**.



Operaciones de números complejos en la forma binómica

Suma y diferencia de números complejos

La suma y diferencia de números complejos se realiza **sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.**

$$\mathbf{(a + b\mathit{i}) + (c + d\mathit{i}) = (a + c) + (b + d)\mathit{i}}$$

$$\mathbf{(a + b\mathit{i}) - (c + d\mathit{i}) = (a - c) + (b - d)\mathit{i}}$$

$$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) =$$

$$= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = \mathbf{-7 + 7\mathit{i}}$$

Multiplicación de números complejos

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedad **distributiva** del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

$$\mathbf{(a + b\mathit{i}) \cdot (c + d\mathit{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathit{i}}$$

$$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) =$$

$$= 10 - 15i + 4i - 6i^2 = 10 - 11i + 6 = \mathbf{16 - 11\mathit{i}}$$

División de números complejos

El cociente de números complejos se hace **racionalizando el denominador**; esto es, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de éste.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{3+2i}{1-2i}=\frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}=\frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2}=\frac{3+8i-4}{1+4}=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

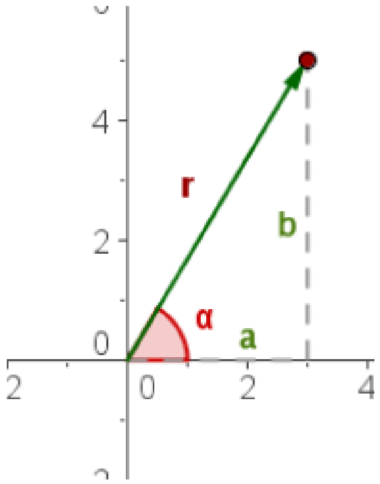
Números complejos en forma polar

Módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo es el módulo del vector determinado por el origen de coordenadas y su afijo. Se designa por **|z|**.

$$z=a+bi$$

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$



Argumento de un número complejo

El argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por **arg(z)**.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} \qquad \begin{cases} \dfrac{+b}{+a} = \alpha \\ \dfrac{+b}{-a} = 180^{\circ} - \alpha \\ \dfrac{-b}{-a} = 180^{\circ} + \alpha \\ \dfrac{-b}{+a} = 360^{\circ} - \alpha \end{cases}$$

Expresión de un número complejo en forma polar.

$z = r_{\alpha}$

$|z| =$ r es el **módulo**.

arg(z) = α es el **argumento**.

Ejemplos

Pasar a la forma polar:

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \operatorname{arc\ tg} \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^{\circ}$$

$z = 2_{60^{\circ}}$

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^{o}$$

$z = 2_{120^{o}}$

$z = -1 - \sqrt{3}\,i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-\sqrt{3}}{-1} = 240^{o}$$

$z = 2_{240^{o}}$

$z = 1 - \sqrt{3}\,i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-\sqrt{3}}{+1} = 300^{o}$$

$z = 2_{300^{o}}$

$z = 2$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{0}{+2} = 0^{o}$$

$z = 2_{0^\circ}$

$z = -2$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{0}{-2} = 180^\circ$$

$z = 2_{180^\circ}$

$z = 2i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{2}{0} = 90^\circ$$

$z = 2_{90^\circ}$

$z = -2i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-2}{0} = 270^\circ$$

$z = 2_{270^\circ}$

Pasar a la forma binómica:

$z = 2_{120º}$

Para pasar de la forma polar a la binómica, tenemos que pasar en primer lugar a la **forma trigonométrica**:

$r_\alpha = r\ (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$

$z = 2 \cdot (\cos 120º + i \text{ sen } 120º)$

$$a = 2 \cdot \cos 120º = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b = 2 \cdot \text{sen} 120º = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$z = 1_{0º} = \mathbf{1}$

$z = 1_{180º} = -\mathbf{1}$

$z = 1_{90º} = \boldsymbol{i}$

$z = 1_{270º} = -\boldsymbol{i}$

Números complejos iguales, conjugados, opuestos e inversos

Números complejos iguales

Dos **números complejos** son **iguales** si tienen el **mismo módulo** y el **mismo argumento**.

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = \alpha + 2\pi k \end{cases}$$

Números complejos conjugados

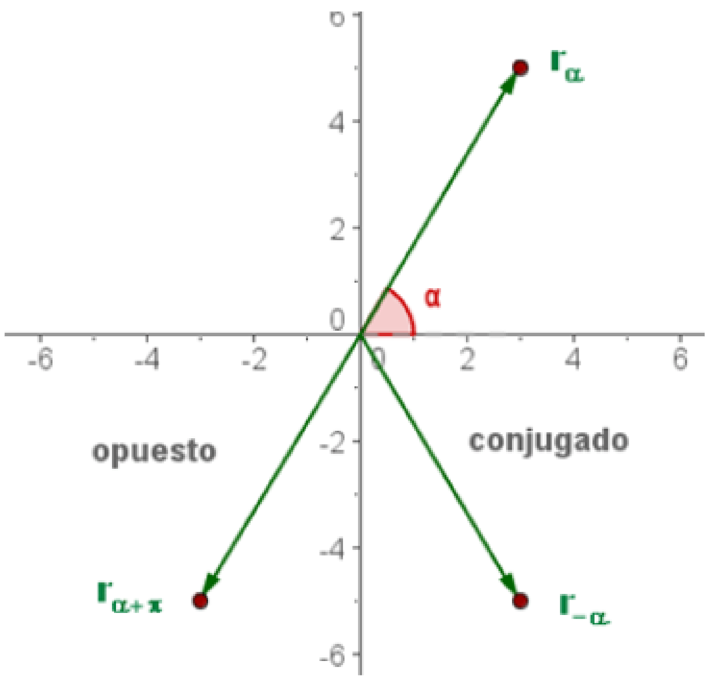
Dos **números complejos** son **conjugados** si tienen el **mismo módulo** y **opuestos sus argumentos**.

$$r_\alpha \ \textit{conjugado} \ r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

Números complejos opuestos

Dos **números complejos** son **opuestos** si tienen el **mismo módulo** y sus **argumentos se diferencian en π radianes**.

$$r_\alpha \ \textit{opuesto} \ r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = (\alpha + \pi) + 2\pi k \end{cases}$$



Números complejos inversos

El **inverso** de un **número complejo** no nulo, tiene por **módulo el inverso del módulo y por argumento su opuesto**.

$$\frac{1}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

Multiplicación de complejos en forma polar

La **multiplicación** de dos **números complejos** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es el producto de los módulos.

Su argumento es la suma de los argumentos.

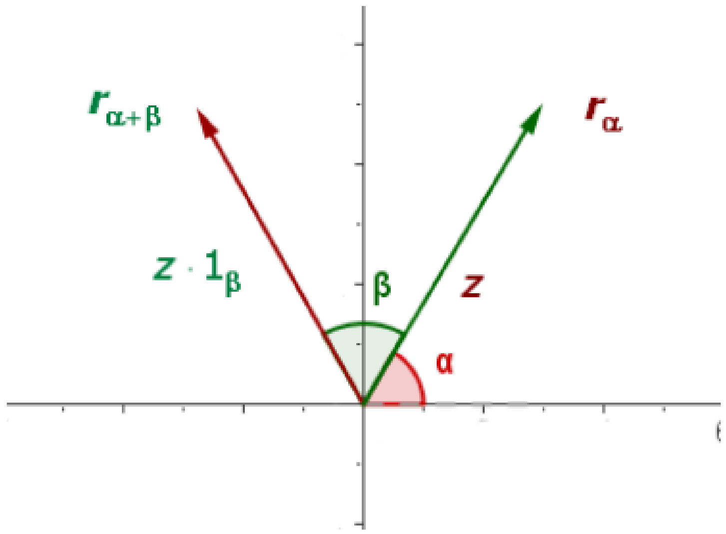
$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$6_{45^\circ} \cdot 3_{15^\circ} = \mathbf{18_{60^\circ}}$

Producto por un complejo de módulo 1

Al multiplicar un número complejo $z = r_{\alpha}$ por 1_{β} se gira z un ángulo β alrededor del origen.

$r_{\alpha} \cdot 1_{\beta} = r_{\alpha + \beta}$



División de complejos en forma polar

La **división** de dos **números complejos** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es el cociente de los módulos.

Su argumento es la diferencia de los argumentos.

$$\frac{r_{\alpha}}{r'_{\beta}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

$6_{45°} : 3_{15°} = \mathbf{2_{30°}}$

Potencia de número complejo

La **potencia enésima** de **número complejo** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es la potencia n-ésima del módulo.

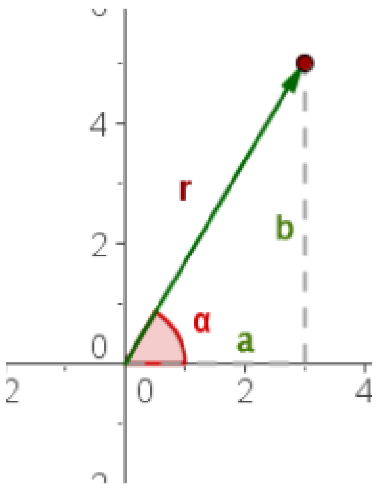
Su argumento es n veces el argumento dado.

$$(r_\alpha)^n = (r)^n_{n\cdot\alpha}$$

$(2_{30°})^4 = \mathbf{16_{120°}}$

Números complejos en forma trigonométrica

$a + bi = r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$



$a = r \cdot \cos\alpha \qquad b = r \cdot \mathrm{sen}\,\alpha$

Binómica	$z = a + bi$
Polar	$z = r_\alpha$
trigonométrica	$z = r\,(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$

Pasar a la forma polar y trigonométrica:

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg } \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^o$

$z = 2_{60^o}$

$z = 2 \cdot (\cos 60^o + i \text{ sen } 60^o)$

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg } \frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^o$

$z = 2_{120^o}$

$z = 2 \cdot (\cos 120^o + i \text{ sen } 120^o)$

$z = -1 - \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg } \frac{-\sqrt{3}}{-1} = 240^o$

$z = 2_{240^o}$

z = 2 · (cos 240º + i sen 240º)

$z = 1 - \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-\sqrt{3}}{+1} = 300^{o}$

z = 2$_{300^{o}}$

z = 2 · (cos 300º + i sen 300º)

z = 2

$|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{0}{+2} = 0^{o}$

z = 2$_{0^{o}}$

z = 2 · (cos 0º + i sen 0º)

z = −2

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{0}{-2} = 180^{o}$

z = 2$_{180^{o}}$

z = 2 · (cos 180º + i sen 180º)

z = 2*i*

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\, \frac{2}{0} = 90^o$$

z = 2_{90^o}

z = 2 · (cos 180º + i sen 180º)

z = −2*i*

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\, \frac{-2}{0} = 270^o$$

z = 2_{270^o}

z = 2 · (cos 270º + i sen 270º)

Escribe en forma binómica:

z = 2_{120^o}

z = 2 · (cos 120º + *i* sen 120º)

$$a = 2 \cdot \cos 120^o = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b = 2 \cdot \text{sen}120^{o} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$z = 1_{0^{o}} = \mathbf{1}$

$z = 1_{180^{o}} = -\mathbf{1}$

$z = 1_{90^{o}} = i$

$z = 1_{270^{o}} = -i$

.

Fórmula de Moivre

$$\left[\, r\left(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha\right)\right]^{n} = r^{n} \cdot \left(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha\right)$$

Raíz de números complejos

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}}$$

La **raíz enésima** de **número complejo** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es la en raíz enésima del módulo.

$$r' = \sqrt[n]{r}$$

Su argumento es:

$$\alpha' = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$$

k = 0,1 ,2 ,3, ... (n-1)

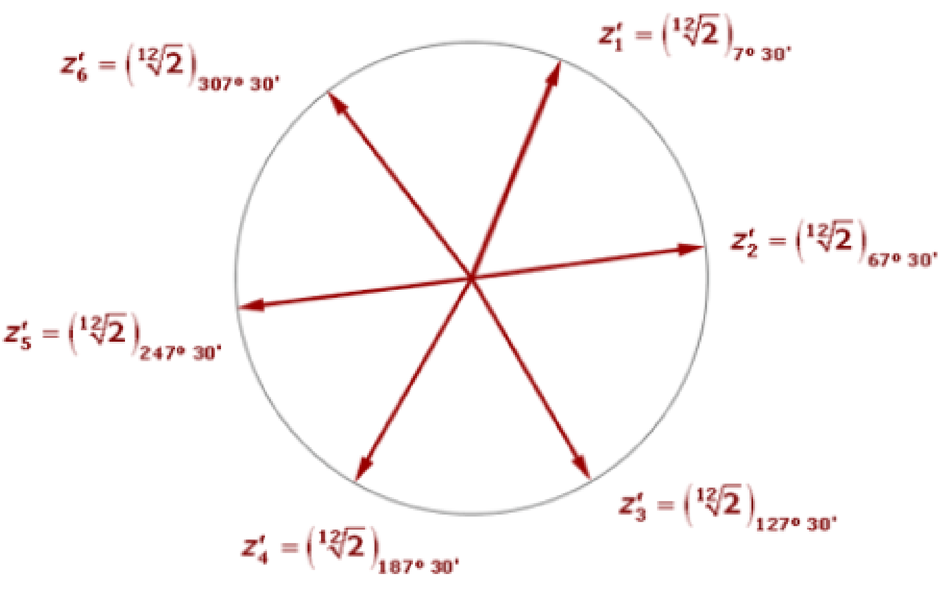
$\sqrt[6]{1+i}$

$z=1+i$ $\quad |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad \alpha = arc\,tg\,\dfrac{+1}{+1}=45^o$ $\quad z=\left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

$\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}}$

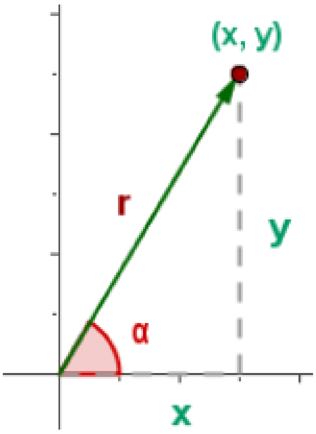
$|z'|=\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)}=\sqrt[12]{2}$

$$\alpha=\frac{45^o+360^o k}{6}\begin{cases} k=0 & \alpha_1=7^o\,30' & z_1'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{7^\circ\,30'}\\ k=1 & \alpha_2=67^o\,30' & z_2'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{67^\circ\,30'}\\ k=2 & \alpha_3=127^o\,30' & z_3'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{127^\circ\,30'}\\ k=3 & \alpha_4=187^o\,30' & z_4'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{187^\circ\,30'}\\ k=4 & \alpha_5=247^o\,30' & z_5'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{247^\circ\,30'}\\ k=5 & \alpha_6=307^o\,30' & z_6'=\left(\sqrt[12]{2}\right)_{307^\circ\,30'} \end{cases}$$



Coordenadas cartesianas y polares

Conversión de coordenadas polares a cartesianas



x = r · cos α

y = r · sen α

Ejemplos

$2_{120º}$

$$x = 2 \cdot \cos 120º = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2 \cdot \mathrm{sen} 120º = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\left(-1,\ \sqrt{3}\, i\right)$$

$1_{0º}$ = **(1, 0)**

$1_{180º}$ = **(−1, 0)**

$1_{90º}$ = **(0, 1)**

$1_{270º}$ = −**(0, −1)**

Conversión de coordenadas cartesianas a polares

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{x}{y} \qquad \begin{cases} \dfrac{+x}{+y} = \alpha \\ \dfrac{+x}{-y} = 180^o - \alpha \\ \dfrac{-x}{-y} = 180^o + \alpha \\ \dfrac{-x}{+y} = 360^o - \alpha \end{cases}$$

Ejemplos

$$\left(1, \sqrt{3}\right)$$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^o$$

2_{60°

$$\left(-1, \sqrt{3}\right)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^o$$

2_{120°

$$\left(-1, -\sqrt{3}\right)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{-\sqrt{3}}{-1} = 240^{o}$$

$2_{240^{o}}$

$\left(1, -\sqrt{3}\right)$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{-\sqrt{3}}{+1} = 300^{o}$$

$2_{300^{o}}$

(2, 0)

$$|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{0}{+2} = 0^{o}$$

$2_{0^{o}}$

(−2, 0)

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{0}{-2} = 180^{o}$$

$2_{180^{o}}$

(0, 2)

$$r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{2}{0} = 90^{0}$$

$2_{90^{\circ}}$

(0, −2)

$$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{-2}{0} = 270^{0}$$

$2_{270^{\circ}}$